



Congresso da Sociedade Brasileira de Computação  
I Encontro de Teoria da Computação  
I Desafio em Algoritmos, Combinatória e Otimização (I DACO)  
<http://etc.dcc.ufmg.br/daco.html>  
<http://www.csbc2016.com.br/>

### Instruções

- (a) As soluções devem ser entregues através do email [daco.etc@gmail.com](mailto:daco.etc@gmail.com)
- (b) A interpretação das questões faz parte da prova. Explique as suposições que fizer para resolver as questões.
- (c) Sempre justifique suas respostas. Lembre que para a avaliação das respostas serão considerados os seguintes critérios, em ordem de importância:
  - Corretude.
  - Complexidade dos algoritmos elaborados.
  - Legibilidade e clareza.
  - Elegância da solução.

---

#### 1. Modele o problema abaixo como um problema de programação linear inteira.

São dados um conjunto de aeroportos  $V$ , uma função de distância entre seus elementos  $d : V^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e um conjunto  $D \subseteq V^2$  que representa demandas de fluxo de passageiros.

Vamos assumir que  $(V, d)$  é simétrica e que respeita a desigualdade triangular, ou seja,  $d(x, y) = d(y, x)$ , e  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  valem para todo  $x, y, z \in V$ .

Cada par  $(x, y) \in D$  nos diz que precisamos enviar passageiros de  $x$  para  $y$ . Nosso objetivo é selecionar um subconjunto de  $S$  de  $V$ , de tamanho  $|S| = p$ , de aeroportos onde poderão ser feitas conexões. Queremos associar cada demanda de fluxo de passageiros  $(x, y) \in D$  a uma conexão  $w$ , de forma a minimizar o maior a maior distância de percurso entre cada origem  $u$  e destino  $v$  passando pela conexão associada  $dw$ .

2. Para a edição de 2017 do ETC, serão selecionados  $T$  trabalhos para serem apresentados nas  $S$  sessões do evento. Cada sessão  $s_i$  tem um número máximo de trabalhos  $t_i$  que podem ser apresentados naquela sessão. Porém, a sessão pode ser mais curta, ou mesmo ser cancelada se decidirmos não alocar nenhum trabalho àquela sessão. Uma vez decididos quantos trabalhos serão apresentados em cada sessão, os trabalhos serão atribuídos de forma aleatória a cada um dos  $T$  slots para trabalhos.

Os organizadores ficaram curiosos para saber de quantas formas poderiam distribuir os trabalhos em sessões. Para esta contagem, eles não estão interessados em quais trabalhos serão apresentados em cada sessão, apenas nas quantidades de trabalhos.

Os organizadores estão ocupados com diversas atividades do CSBC e pediram que você desenvolvesse um algoritmo eficiente para calcular este número. Como não gostam muito de algoritmos ineficientes, é importante que você analise a complexidade de seu algoritmo e que ele seja tão eficiente quanto possível.

3. Numa pizzaria, as pizzas são cortadas por robôs. O robô faz cada corte da seguinte maneira: ele escolhe, aleatória e uniformemente, dois pontos da circunferência da pizza e então corta a pizza ao longo da corda que une os dois pontos escolhidos. Se, ao pedir uma pizza, eu indicar que quero que ela seja cortada três vezes pelo robô, qual o número esperado de pedaços em que a pizza será particionada?
4. Uma coloração de um grafo  $G = (V, E)$  é uma atribuição de um número inteiro positivo (chamado de cor) a cada um dos vértices de um grafo tal que dois vértices vizinhos recebem números distintos. O número cromático de um grafo é o menor número de cores necessárias para colorir seus vértices.

Uma coloração alegre é uma coloração tal que um vértice inicial é escolhido arbitrariamente e recebe a cor 1. Em seguida, os demais vértices são coloridos iterativamente, um vértice por vez, em uma ordem arbitrária, respeitando-se as seguintes restrições:

- (a) O próximo vértice deve possuir pelo menos um vizinho já colorido.
- (b) O vértice é colorido com a menor cor possível.

Prove ou dê contra-exemplo: para qualquer grafo  $G$ , existe uma coloração alegre que utiliza um número de cores igual ao número cromático (note que um número de cores inferior ao o número cromático não é possível).

5. Uma empresa de telefonia celular possui antenas, todas com o mesmo raio de alcance  $r$ . Para este problema, podemos assumir que a posição das antenas são pontos no plano. Duas antenas conseguem se comunicar se estão a distância no máximo  $r$ .

Uma empresa concorrente quer testar a qualidade do serviço e uma métrica que lhes interessa é encontrar o maior número de antenas tais que nenhum par delas consiga se comunicar. Um funcionário desenvolveu o seguinte algoritmo:

- $S = \emptyset$
- Seja  $X$  o conjunto de antenas.
- Enquanto  $X \neq \emptyset$ 
  - Seja  $x$  uma antena de  $X$  que alcança o menor número de antenas.
  - $S \leftarrow S \cup \{x\}$ .
  - Remova de  $X$  a antena  $x$  e todas as antenas com as quais  $x$  consegue se comunicar.

Infelizmente, o funcionário não conseguiu provar que este algoritmo sempre encontra a solução ótima para o problema, ou seja, um conjunto de antenas máximo com a propriedade desejada.

Mostre que este algoritmo está correto ou forneça um contra-exemplo.

6. O parlamento de um certo país tem um sério problema com recursos públicos que são desviados. O parlamento é composto de 100 indivíduos igualmente corruptos.

A cada ano, 100 emendas parlamentares poderão ser feitas pelos membros do parlamento. Com isso, eles podem dar prioridade a necessidades específicas do país, de acordo com suas vontades. Mas a distribuição do número de emendas por parlamentares não é uniforme e, como são corruptos, utilizam-se destas emendas para trocas de favores. Para a divisão de emendas entre os parlamentares, há uma votação, onde os mesmos se utilizam de lógica.

Embora os parlamentares possam não saber lógica, cada um deles tem muitos assistentes que possuem um conhecimento aprofundado de lógica. Os parlamentares seguem os conselhos de seus assistentes, e sabem que todos os outros parlamentares também o fazem.

Todos os parlamentares tem um estrito senso de valores, e todos tem a seguinte lista ordenada de prioridades:

- (a) Não ser alvo de uma delação e não ser preso.
- (b) Conseguir a maior quantidade de emendas.
- (c) Fazer com que outros parlamentares sejam denunciados.
- (d) Garantir que os parlamentares de maior senioridade consigam o maior numero de emendas.

No primeiro dia dos seus mandatos os parlamentares são informados das regras da casa: o parlamentar mais novo propõe como as emendas devem ser divididas entre os parlamentares. Em seguida, há uma votação. Se a sua proposta for aceita pela maioria absoluta dos parlamentares, então ela é adotada. Caso contrário, ele é denunciado por esquemas de corrupção anteriores, e os parlamentares restantes fazem uma nova reunião para decidir sobre as emendas, com um parlamentar a menos.

Qual deve ser a estratégia a ser seguida pelos parlamentares? Em particular, qual deve ser proposta do parlamentar mais novo para que ela seja aceita e maximize seu ganho (segundo o esquema de valores daqueles parlamentares)?

7. Seja  $G = (V, E)$  um grafo simples conexo com  $n$  vértices. Mostre que é possível decompor seu conjunto de arestas em, no máximo,  $\frac{1}{2}(n+1)$  caminhos, ou seja, que existem no máximo  $\frac{1}{2}(n+1)$  caminhos, de forma que os seus conjuntos de arestas formem uma partição de  $E(G)$ .